Stimmungen und Temperaturen

Wolf-G. Blümich

Als es beim Selbstbau einer Drehorgel dann daran ging die Pfeifen zu stimmen, wollte ich genau verstehen, was ich da mache, wenn ich z.B. das C fünf Cent höher stimme als normal. Deshalb war es notwendig, sich mit Tonleitern und verschiedenen Möglichkeiten der Stimmung auseinander zu setzen. Die Grundlagen und Zusammenhänge der Töne, Tonleitern, Stimmungen und Temperaturen werden im Folgenden angereichert mit Beispielen erläutert.

1. Einleitung

Bevor wir uns mit dem eigentlichen Thema beschäftigen können, müssen wir uns zuerst einmal mit den beiden Begriffen in der Überschrift befassen, denn sie haben in unterschiedlichen Kontexten vielerlei Bedeutungen. Hier geht es nun nur um den Bereich der Musik

1.1. Stimmungen

Selbst in der Musik ist der Begriff Stimmung schon mit zwei Bedeutungen belegt. Einerseits bezeichnet er den Vorgang, bei dem die verschiedenen Schallerzeuger (Saite, Luftsäule, Zunge usw.) eines Instrumentes so eingestellt werden, dass sie jeweils den Ton mit der gewünschten Tonhöhe bzw. Frequenz erzeugen. Andererseits werden auch die Prinzipien, nach denen man vorgeht, um die einzustimmenden Tonfrequenzen zu ermitteln und festzulegen, als Stimmung bezeichnet. Die bekanntesten Prinzipien sind die Reine Stimmung, die Mitteltönige Stimmung, die Wohltemperierte Stimmung und die Gleichstufige Stimmung. (Und dann kann man natürlich mit der Musik unterschiedlich gestimmter Instrumente auch noch verschiedene Stimmung bei den Zuhörern erzeugen.)

1.2. Temperaturen

Bei einigen der Stimmungsprinzipien (siehe 1.1) besteht die Möglichkeit, den grunsätzlichen Anforderungen der Stimmung mit unterschiedlichen Ergebnissen gerecht zu werden. Die Bandbreite dieser Möglichkeiten nennt man die Temperaturen. Dies findet man insbesondere bei der Mitteltönigen (siehe 3.3) und der Wohltemperierte Stimmung (siehe 3.4).

2. Physikalische Grundlagen der Tonerzeugung

2.1. Die Schallerzeugung bei Instrumenten

Für die Erzeugung der Töne gibt es bei den Instrumente verschiedene Möglichkeiten (die Saite bei der Gitarre oder dem Klavier, die Luftsäule in der Flöte oder Posaune, die Zunge in der Mundharmonika oder dem Akkordeon usw.). Immer geht es darum, dass man etwas zum Schwingen bringt, das dann die umgebende Luft anstößt, so dass sich die daraus folgende Luftdruckschwankungen in der Umgebung ausbreiten und irgendwann einmal unser Trommelfell zum Mitschwingen anregen, so dass wir etwas davon hören können.

2.2. Grundtöne und Obertöne

Hier soll jetzt stellvertretend für die genannten Schwingungserzeuger eine an beiden Enden eingespannte Saite betrachtet werden. Für sie gibt es mehrere Möglichkeiten (Schwingungsmoden) zu schwingen (Bild 1).Im einfachsten Fall hat die Saite in der Mitte einen Schwingungsbauch. Dann breitet sich auf der Saitenlänge l gerade eine halbe Welle aus. Die Wellenlänge λ_1 ist dann doppelt so groß wie die Saitenlänge l, also $\lambda_1 = 2 \cdot l$. Die Frequenz f des Tones ist zum Kehrwert der Wellenlänge λ proportional: $f \sim \frac{1}{\lambda}$. Für den tiefsten Ton, den die Saite erzeugen kann, den Grundton mit der Frequenz f_1, gilt dann $f_1 \sim \frac{1}{2 \cdot l}$.

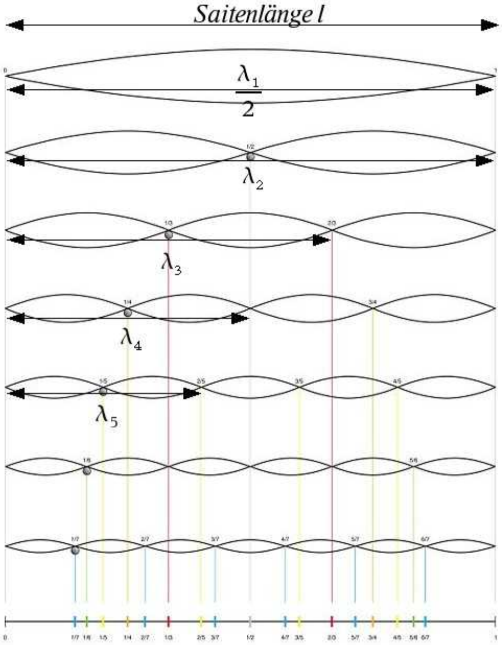

Bild 1: Schwingungsmoden einer Saite

Nun kann die Saite aber auch so schwingen, dass eine komplette Wellenlänge λ_2 bzw. zwei halbe Wellenlängen von λ_2 auf die Saitenlänge l passen. Dann hat sie zwei Schwingungsbäuche und in der Mitte eine Schwingungsknoten. Verglichen mit dem Grundton ist die Wellenlänge dann nur noch halb so groß, die Frequenz also doppelt so groß (s.o.). Dies ist die Frequenz f_2 des ersten Obertons.

Wenn sich drei Schwingungsbäuche auf der Saite ausbilden, passen drei halbe Wellenlängen von λ_3 auf die Saitenlänge l. Die Wellenlänge λ_3 für den zweiten Oberton beträgt ein Drittel der Wellenlänge des Grundtones und die Frequenz f_3 ist dreimal so groß wie die des Grundtones. Dies kann man nun so fortsetzen. So erhält man die Obertonreihe (auch Naturtonreihe genannt). (Achtung: Die Nummer des Obertons ist immer um eins kleiner als der Index seiner Wellenlänge oder Frequenz.)

Da beim Anzupfen, Anschlagen oder Streichen einer Saite nie nur eine dieser Schwingungsmoden angeregt wird, setzt sich der dabei erzeugte Ton immer aus einem Gemisch der dabei entstehenden Frequenzen zusammen. Dieses Tongemisch bestimmt den Klang des Instrumentes. Der Grundton hat dabei den stärksten Anteil und die Zusammensetzung der erzeugten Obertöne hängt davon ab, wo und wie die Saite angeregt wird. Geschieht dies z.B. in der Mitte, treten vorzugsweise die ungeradzahligen Obertonfrequenzen auf.

Das Tongemisch der angeregten Saite enthält die ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz f_1. Um das alles besser vorstellbar zu machen, gehen wir nun von der Frequenz eines konkreten Tones aus. Wir nehmen das eingestrichene c‘ mit $f_{c'} = 264\ Hz$. In der Tabelle 1 sind die Frequenzen der Obertöne dargestellt. Eine Verdoppelung der Frequenz entspricht immer einer Oktave. Der erste, der dritte, der 7. und der 15. Oberton sind also die erste, zweite, dritte und vierte Oktave über dem Grundton. Aber es gibt noch Töne dazwischen. Die dargestellten Frequenzverhältnisse bzw. die Indexverhältnisse dieser Obertöne werden jeweils bezogen auf den darunter liegenden Oktavton angegeben. Neben den Okatven mit dem Verhältnis 2 treten noch andere Verhältnisse mehrfach auf. Sie gehören auch zu gewohnten Intervallen der Dur-Tonleiter in der reinen

Stimmung (siehe 3.1). Es sind dies die Quinte (3/2) und die Terz (5/4), die zum Dreiklang gehören. Auch die Sekunde (9/8) und die Septime (15/8) sind dabei. Je Stärker die Saite zum Schwingen angeregt wird, desto mehr Obertöne werden erzeugt, die sich mit dem Grundton mischen. Der Klang enthält damit immer mehr nicht passende Töne, so dass er schärfer bzw. unangenehmer wird.

Index	Frequenz/ Hz	Ton	Oberton	Frequenzverhältnis	Intervall
1	264	c'	0	1 / 1 = 1	Prime
2	528	c''	1	2 / 1 = 2	1. Oktave
3	792	g''	2	3 / 2 = 1,5	Quinte
4.	1056	c'''	3	4 / 2 = 2	2. Oktave
5.	1320	e'''	4	5 / 4 = 1,25	Terz
6.	1584	g'''	5	6 / 4 = 3 / 2 = 1,5	Quinte
7.	1848		6	7 / 4 =	
8	2112	c'''	7	8 / 4 = 2	3. Oktave
9	2376	d''''	8	9 / 8 = 1,125	Sekunde
10	2640	e''''	9	10 / 8 = 5 / 4 = 1,25	Terz
11	2904		10	11 / 8 =	
12	3168	g''''	11	12 / 8 = 3 / 2 = 1,5	Quinte
13	3432		12	13 / 8 =	
14	3696		13	14 / 8 =	
15	3960	h''''	14	15 / 8 = 1,875	Septime
16	4224	c'''''	15	16 / 8 = 2	4. Oktave

Tabelle 1: Obertöne und Intervalle (Obertonreihe)

3. Stimmungen und Temperaturen

3.1 Die reine Stimmung

(auch natürliche, diatonische oder harmonische Stimmung genannt)

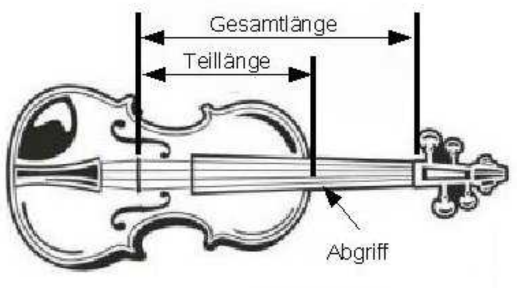

Bild 2: Teillängen einer Geigensaite

Ton	Längen-verhältnis	Intervall	Frequenz-verhältnis	Frequenz in Hz
c'	1 / 2	Prime	1 / 1	264
d'	8 / 9	Sekunde	9 / 8	297
e'	4 / 5	Terz	5 / 4	330
f'	3 / 4	Quarte	4 / 3	352
g'	2 / 3	Quinte	3 / 2	396
a'	3 / 5	Sexte	5 / 3	440
h'	8 / 15	Septime	15 / 8	495
c''	1 / 2	Oktave	2 / 1	528

Tabelle 2: Reine Stimmung

Wir betrachten die Saite einer Geige, die auf Grund ihrer Gesamtlänge und Saitenspannung einen bestimmten

Grundton hat. Der Einfachheit halber nehmen wir wieder einmal an, dies sei ein eingestrichenes c‘ mit 264 Hz. Beim Spielen auf der Geige wird die Saite auf eine Teillänge verkürzt, indem die Saite beim Abgriff mit einem Finger gegen das Griffbrett gedrückt wird. Wenn man nun für die einzelnen Töne einer reinen Dur-Tonleiter die Teillängen misst und diese ins Verhältnis zur Gesamtlänge setzt, dann erhält man die in der Tabelle 2 dargestellten Längenverhältnisse, deren Kehrwerte zum großen Teil bereits in der Obertonreihe (siehe 1) vorkamen.

Die Frequenzverhältnisse der reinen Stimmung kann man auch allein aus Vielfachen und Teilen der Oktave, der Quinte und der großen Terz ableiten. Dies wird in Tabelle 3 vorgeführt. Dabei gelten für Intervalle folgende Rechenregeln:

- TeilIntervalle werden zu einem Gesamtintervall zusamengefügt, indem man die Verhältnisse der Intervalle miteinander multipliziert.
- Andersherum erhält man das Verhältnis eines Teilintervalls, wenn man das Verhältnis des Gesamtintervalls durch das Verhältnis des Teilintervalls teilt.

<table>
<tr><td>1</td><td>Oktave</td><td colspan="8">Oktave: 2/1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Quinte</td><td colspan="5">Quinte: 3/2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Terz</td><td colspan="3">gr. Terz: 5/4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Ton</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td><td>g</td><td>a</td><td>h</td><td>c</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Schritt</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">kl. Terz: 3/2 : 5/4 = 6/5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">gr. Terz wie c-e: 5/4</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Septime</td><td colspan="7">3/2 · 5/4 = 15/8</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">kl. Terz wie e-g: 6/5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Sexte</td><td colspan="6">2 : 6/5 = 2 · 5/6 = 5/3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">gr. Terz wie c-e: 5/4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Quarte</td><td colspan="4">4/3 : 5/4 = 5/3 · 4/5 = 4/3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td></td><td></td><td colspan="4">Quarte wie c-f: 4/3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Sekunde</td><td colspan="2">3/2 : 4/3 = 9/8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabelle 3: Berechnung der Frequenzverhältnisse aus den Vorgaben für Terz, Quinte und Oktave

Die Zeilen 1 bis 3 enthalten die Vorgaben für die Oktave, die Quinte und die große Terz.
In Zeile 4 werden die Töne von c-Dur benannt und in Zeile 5 ist notiert, ob es sich bei den Schritten von Ton zu Ton um Halbton- oder Ganztonschritte handelt.
In Zeile 6 erfolgt die erste Berechnung für die klein Terz von e nach g, die aus 1+½ Tonschritten besteht (Die große Terz von c nach e besteht aus 1+1 Tonschritten.). Man erhält das Verhältnis für die kleine Terz von e nach g, indem man das Verhältnis von c nach g durch das Verhältnis von e nach g teilt, also 3/2 : 5/4 = 3/2 · 4/5 = 12/10 = 6/5.
In Zeile 7 wird die Berechnung der Septime für Zeile 8 vorbereitet, indem die große Terz von g nach h eingetragen wird und dann die Verhältnisse in Zeile 8 multipliziert werden.
In den Zeilen 9 bis 12 werden die Sexte und die Quarte analog zu Zeile 6 berechnet.
In den Zeilen 13 und 14 wird die Sekunde aus der Quinte und der Quarte berechnet.
So erhält man alle Intervalle der Dur-Tonleiter in reiner Stimmung.

Es werden nun die einzelnen Schritte von Ton zu Ton untersucht.

Ton	C	D	E	F	G	A	H	C
Verhältnis zum Grundton	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
Verhältnis zum Nachbarton		9/8:1/1 = 9/8	5/4:9/8 =10/9	4/3:5/4 =16/15	3/2:4/3 =9/8	5/3:3/2 =10/9	15/8:5/3 = 9/8	2/1:15/8 =16/15
Schritt		1	1	1/2	1	1	1	1/2

Tabelle 4: Intervalle der reinen Stimmung

Dabei zeigt es sich, dass es zwei verschieden große Ganztonschritte gibt. Das Intervall von C nach D ist mit 9/8 = 1,125 größer als das Intervall von D nach E mit 10/9 = 1,1111. Der rechnerische Unterschied ist ein kleines Intervall mit der Größe 9/8 : 10/9 = 81/80, das als syntonisches Komma bezeichnet wird. Wenn man also auf einem in C rein gestimmten Instrument D-Dur spielen wollte, wäre der erste Tonschritt ein Ganztonschritt von der falschen Größe. Außerdem wäre die Ausführung von zwei Halbtonschritten 16/15 · 16/15 = 256/225 = 1,1377 schon wieder ein neuer Ganztonschritt, der nur grob in der Nähe der anderen Ganztonschritte liegt. Rein gestimmte Instrumente können also immer nur in der einen Tonart gespielt werden, für die sie gestimmt wurden. Logischer Weise gibt es für die reine Stimmung keine unterschiedlichen Temperaturen.

3.2. Die pythagoreische Stimmung

(auch Quintenstimmung genannt)

Oktave	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H	
-3					Des''' <- As'							As'' <- Es'	
-2								Es' <- B					
-1			B <- f							f <- c'			
0					c' -> g'						g' -> d''		
1						d'' -> a''							
2	a'' - e'''							e''' -> h'''					
3					h''' -> fis''''						fis'''' -> cis'''''		
4 bzw. -3													

Tabelle 5: Ableitung der chromatischen Tonleiter aus reinen Quinten (Quintenzirkel)

Grundidee der pythagoreischen Stimmung (Pythagoras, 550 v.Chr.) ist die stets reine Quinte. Daraus kann man folgendermaßen alle Töne einer chromatischen Tonleiter ableiten: Man geht vom eingestrichenen c' aus sechs mal in reinen Quinten nach oben und sechs mal nach unten. Dies kann man in Tabelle 5 nachvollziehen.

Zwölf reine Quinten verteilen sich dabei auf sieben Oktaven. Dann kommt man wieder beim Anfangston an (Quintenzirkel) und hat alle Zwischentöne, wenn man sie alle in die erste Oktave verschiebt. Sieben Oktaven ergeben eine Änderung der Frequenz um den

Faktor $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$. Die zwölf reinen Quinten ergeben $(\frac{3}{2})^{12} = 129{,}746$. Das ist aber um $\frac{129{,}746}{128} = 1{,}0136$ mehr als bei den fünf Oktaven. Diese Abweichung bzw. dieses Intervall wird als das pythagoreisches Komma bezeichnet. Bei chromatischen Instrumenten, die so gestimmt sind, klingen alle Tonarten etwas anders, denn je weiter die Tonart im Quintenzirkel von C-Dur entfernt ist, desto größer werden die Abweichungen der Töne, die schließlich zum pythagoreischen Komma führen. Die Intervalle werden immer unreiner und man hört immer mehr Schwebungen. Am reinsten klingt also C-Dur. Am Anfang und Ende des Quintenzirkels müssten Des und Cis eigentlich der gleiche Ton sein. Das Des müsste aber deutlich höher liegen. Da dieser Ton jedoch durch das Cis am anderen Ende des Quintenzirkels bereits festgelegt ist, ergibt sich am Schluss nun eine deutlich zu kleine Quinte von As nach Des. Eine solche falsche klingende Quinte wird als Wolfsquinte bezeichnet. Hier ist sie um das pythagoreische Komma kleiner als eine reine Quinte. Bei Kompositionen war die Wolfsquinte deshalb zu vermeiden. Man wählte möglichst Tonarten, die im Quintenzirkel in der Nähe von C liegen.

3.3 Die mitteltönige Stimmung

Die mitteltönige Stimmung ist der Versuch Temperaturen so zu konstruieren, dass auf chromatischen Instrumenten (Klavier, Chembalo, Orgel) eine große Zahl von Tonarten gespielt werden kann, bei denen die großen Terzen möglichst rein klingen. Diese Forderung entsprach den Hörgewohnheiten des späten Mittelalters.

Zur Lösung dieses Problems betrachten wir im Quintenzirkel vier aufeinander folgende reine Quinten (z.B. C – G – D – A – E). Diese bilden zusammen ein Intervall der Größe $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$. Dieses Intervall überstreicht zwei Oktaven und eine große Terz, also $(\frac{2}{1})^2 \cdot (\frac{5}{4}) = 5 = \frac{80}{16}$. Das Intervall aus den gestapelten Quinten ist somit um $(\frac{81}{16}) : (\frac{80}{16}) = (\frac{81}{16}) \cdot (\frac{16}{80}) = \frac{81}{80}$ größer. Das ist gerade ein syntonisches Komma (siehe 3.1). Um diesen Fehler auszugleichen, vermindert man elf der zwölf Quinten im Quintenzirkel jeweils um ein Viertel des syntonischen Kommas. Über vier Quinten führt das dann auch, wie gefordert, zu reinen Terzen und bei den direkt benachbarten Quinten sind die Terzen noch relativ rein, so dass 8 verwendbare Tonleitern möglich sind. Aber die restlichen Tonleitern praktisch unbrauchbar. Und weil der Quintenzirkel wie bei der pythagoreischen Stimmung auch hier nicht schließt, ist die zwölfte Quinte wieder eine jaulende Wolfsquinte.

Diese beschriebene Lösung wird als Viertel-syntonisches-Komma-mitteltönige Stimmung bezeichnet. Sie ist eine Temperatur der mitteltönigen Stimmung. Weitere Temperaturen wurden mit anderen Verteilungen des syntonischen Kommas auf die Quinten konstruiert, führen aber alle zu weniger reinen Terzen.

3.4 Die wohltemperierte Stimmung

Für wohltemperierte Stimmungen gibt es ebenfalls verschiedene Möglichkeiten, dh. verschiedene Temperaturen. Ihre gemeinsamen Ziele sind es, alle Tonarten auf einem Instrument spielen zu können, Klangunterschiede zwischen den Tonarten wie bei der

pythagoreischen Stimmung zu erhalten und das pythagoreische Komma auszugleichen, indem es im Quintenzirkel auf die Quinten verteilt wird. Die Frequenzverhältnisse für gleiche Intervalle bei verschiedenen Tonarten unterscheiden sich hier geringfügig.
Mehrere Temperaturen der wohltemperierten Stimmung hat Andreas Werckmeister (1681) entworfen, in denen er immer einige Quinten im Quintenzirkel um Teile des pythagoreischen Kommas verkleinert, ggf. auch vergrößert, so dass der Quintenzirkel schließt. Werckmeister beginnt die Zählung seiner Temperaturen mit III, weil er die reine Stimmung mit I und die Viertel-syntonisches-Komma-mitteltönige Stimmung mit II bezeichnet hat.

Temperatur Werckmeister III: Die vier Quinten C - G, G - D, D – A und H - Fis im Quintenzirkel werden jeweils um ein Viertel des pythagoreisches Kommas verkleinert. Die anderen Quinten behalten das Verhältnis 3/2.

Temperatur Werkmeister V: Die fünf Quinten D – A, A – E, Fis – Cis, Cis – Gis und F – B werden jeweils um ein Viertel des pythagoreisches Kommas verkleinert. Quinte Gis – Dis wird um ein Viertel des pythagoreisches Kommas vergrößert. Die anderen Quinten behalten das Verhältnis 3/2.

Die Temperatur Werckmeister III ist die am häufigsten verwendete wohltemperiert Stimmung. Temperaturen IV und VI werden hier nicht vorgestellt.

3.5 Die gleichstufige Stimmung

(auch chromatische, gleichschwebende Stimmung genannt)

Bei der gleichstufigen Stimmung nimmt man keine Rücksicht mehr auf Intervalle, die sich aus der Obertonreihe (siehe 1.) ergeben. Es geht nur noch darum, dass die insgesamt zwölf Halbtonschritte in einer Oktave alle gleich groß sind, d.h., dass alle das gleiche Frequenzverhältnis x haben, und dass diese zwölf Halbtonschritte zusammen zu der für die Oktave festgelegten Frequenzverdopplung führen. Es muss also gelten $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^{12} = 2$. Das Frequenzverhältnis x für den Halbtonschritt erhält man, indem man $x = \sqrt[12]{2} = 1{,}0594631$ berechnet. Für den Ganztonschritt müssen zwei Halbtonschritte nacheinander ausgeführt werden: $x \cdot x = x^2 = 1{,}0594631^2 = 1{,}1224621$. Von einem vorgegebenen Ton ausgehend, z.B: dem Kammerton a' mit 440 Hz, kann man nun die Frequenzen aller Töne berechnen. Auf Instrumenten, die nach diesem Prinzip gestimmt sind, können alle Tonarten gespielt werden und sie klingen alle gleich. Sie weichen alle mit den gleichen Fehlern von der reinen Tonarten ab.

4 Das Cent

Das Cent ist eine Angabe für Frequenzverhältnisse bei Stimmungen. Mit ihm kann man das Frequenzverhältnis eines Intervalls ausdrücken oder aber auch die Abweichungen von Tonfrequenzen in einer speziellen Stimmung von denen der gleichstufigen Stimmung beschreiben.

Bei der reinen Stimmung verdoppelt sich die Frequenz im Tonraum einer Oktave bei zwölf gleich großen Halbtonschritten. Um Abweichungen von einem solchen Halbtonschritt der gleichstufigen Stimmung zur Realisierung anderer Stimmungen noch ausreichend genau angeben zu können, wird ein solcher Halbtonschritt in 100 gleich große Teilschritte zerlegt. Ein solcher Teilschritt des Halbtonschritts der gleichstufigen Stimmung heißt Cent. Eine

Oktave hat somit 1200 Cent. Dann entspricht ein Cent einem Frequenverhältnis von $\sqrt[1200]{2}=1{,}00057779$ (analog zu 2.3).

Wenn man nun das Frequenzverhältnis einer Abweichung oder eines Intervalls in Cent angeben will, so sagt man nur noch, wie oft das Frequenzverhältnis für 1 Cent mit sich selbst mal genomen werden muss, um auf das zu beschreibende Frequenzverhältnis zu kommen. Das zu beschreibende Frequenzverhältnis wird somit in Form einer Potenz angegeben, bei der das Frequenzverhältnis für 1 Cent die Basis ist und die Anzahl Δ der Cent im Exponenten steht. Das Cent gibt nur eine Anzahl an und ist somit keine Einheit, sondern nur eine Bezeichnung für die Anzahl.

Beispiele:

<u>1. Wie viel Cent entspricht eine gleichstufige Quinte?</u>

- Die Quinte besteht aus 7 Halbtonschritten, also ist das Frequenzverhältnis $\frac{f_{oben}}{f_{unten}}=(\sqrt[12]{2})^7=1{,}498307077$.
- Wie oft muss nun der Cent-Schritt 1,00057779 mit sich selbst multipliziert werden, um auf 1,498307 zu kommen? In der Gleichung $1{,}00057779^{\Delta}=1{,}498307077$ muss somit Δ bestimmt werden.
- Die Gleichung wird dafür logarithmiert: $\ln 1{,}00057778^{\Delta}=\ln 1{,}498307077$.
- Mit dem Logarithmusgesetz $\ln a^b=b\cdot\ln a$ erhält man daraus: $\Delta\cdot\ln 1{,}00057779=\ln 1{,}498307077$.
- Dies kann nach Δ aufgelöst und mit dem Taschenrechner ausgerechnet werden: $\Delta=\frac{\ln 1{,}498307077}{\ln 1{,}00057779}=\frac{0{,}404335855}{0{,}000577623}=700$.

Ergebnis: Die Quinte in gleichstufiger Stimmung hat 700 Cent. Das ist eigentlich nichts Neues, denn definitionsgemäß besteht die Quinte in gleichstufiger Stimmung ja aus 7 Halbtonschritten zu je 100 Cent.

<u>2. Um wie viel Cent weicht die reine Quinte von der gleichstufigen Quinte ab?</u>

- Das Frequenzverhältnis bei der reinen Quinte ist 3/2 = 1,5.
- Es muss jetzt nur im letzten Schritt bei Beispiel 1 das Frequenzverhältnis 1,5 an die Stelle des Frequenzverhältnisses der gleichstufigen Quinte 1,498307077 gesetzt und dann ausgerechnet werden.

$$\Delta=\frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}00057779}=\frac{0{,}405465108}{0{,}000577623}=701{,}954=\sim 702$$

Ergebnis: Der Vergleich mit der gleichstufigen Quinte zeigt, dass die reine Quinte um 2 Cent größer ist.

<u>3. Um wieviel Cent weicht das c' in reiner Stimmung vom c' in gleichstufiger Stimmung ab?</u>

- Wir gehen vom Kammerton a' mit 440 Hz aus.
- In der reinen Stimmung liegt das c' um eine Sexte (5/3) unter dem a', also $f_{c,rein}=440\,Hz:\frac{5}{3}=264\,Hz$.
- In der gleichstufigen Stimmung liegt das c' um neun Halbtonschritte unter dem a', also $f_{c,gleichstufig}=440\,Hz:(\sqrt[12]{2})^9=261{,}62557\,Hz$
- Das Frequenzverhältnis beträgt dann $\frac{f_{c,rein}}{f_{c,gleichstufig}}=\frac{264\,Hz}{261{,}62557\,Hz}=1{,}0090757$.

- Dieses Verhältnis wird wieder verglichen mit dem des Cent (siehe Beispiel 2):

$$\Delta=\frac{\ln 1{,}0090757}{\ln 1{,}00057779}=\frac{0{,}009034763}{0{,}000577623}=15{,}64=\sim 16$$

Ergebnis: Das c' in reiner Stimmung ist um etwa 16 Cent höher als das c' in gleichstufiger Stimmung.

<u>4. In der Stimmanleitung ist angegeben, dass das C um 6 Cent höher gegenüber dem gleichstufig gestimmten C gestimmt werden soll. Welche Frequenz muss dann das zweigestrichene c'' haben?</u>

- Das eingestrichene a hat 440 Hz.
- In der gleichstufigen Stimmung liegt das zweigestrichene c'' drei Halbtonschitte mit jeweils 100 Cent, also insgesamt 300 Cent, höher als das a'.
- Das zu stimmende c'' liegt noch einmal 6 Cent, insgesamt also 306 Cent, höher.
- Um auf die Frequenz des zu stimmenden c'' zu kommen, muss die Frequenz des a' 306 mal mit dem Frequenzverhältnis für 1 Cent multipliziert werden:

$$f_{c2+6\text{Cent}}=440\,Hz\cdot 1{,}00057779^{306}=440\,Hz\cdot 1{,}193335923=525{,}07\,Hz=\sim 525\,Hz$$

Ergebnis: Das zweigestrichene c'' muss auf 525 Hz gestimmt werden.

Zusammenfassung: Cent

Wenn man Frequenzverhältnisse V in Cent ausdrücken will, bieten sich nach den Beispielen oben folgende Formeln zur Umrechnung an:

$\Delta=\frac{\ln V}{\ln 1{,}00057779}$ in Cent oder $\Delta=\frac{\ln V}{0{,}000577623}$ in Cent oder ganz allgemein $\Delta=\frac{\ln V}{\ln \sqrt[1200]{2}}$.

Wenn von einem Intervall die Ausgangsfrequenz f_1 in Hz und die Intervallgröße Δ in Cent geben sind, erhält man die Endfrequenz f_2 mit folgender Rechnung:

$f_2=f_1\cdot 1{,}00057779^{\Delta}$.

Für die Umrechnungen zwischen Frequenzangaben und Cent-Angaben braucht man meistens einen Taschenrechner und hat viele Fehlermöglichkeiten, denn man muss Intervalle, die meistens in Brüchen angegeben werden, zusammenfassen und dabei die Brüche bzw. Dezimalbrüche multiplizieren. Das alles geht einfacher bei den Rechnungen mit Cent. Da das Cent so festgelegt ist, dass man mit ihm für die Intervallgröße nur die Anzahl der Cent-Intervalle darin angibt, kann man Intervalle zusammenfassen, indem man ihre Cent-Anzahlen einfach nur addiert. Das ist bequemer und anschaulicher.

4. Übersicht über verschiedene Temperaturen

Die **chromatische Tonleiter** in gleichstufiger Stimmung ist in Tabelle 6 dargestellt.

Ton	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H	C
Intervall in Cent	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

Tabelle 6: Gleichstufige chromatische Tonleiter

Die Intervalle für eine **gleichstufige Dur-Tonleiter** enthält Tabelle 7 am Beispiel von C-Dur.

Ton	C	D	E	F	G	A	H	C
Intervall in Cent	0	200	400	500	700	900	1100	1200

Tabelle 7: Gleichstufige Dur-Tonleiter (Beispiel c-Dur)

Die Abweichungen der Töne der **reinen oder diatonischen Tonleiter** von den Intervallen der gleichstufigen Dur-Tonleiter sind am Beispiel C-Dur in Tabelle 8 eingetragen. In der zweiten Zeile sind zu allen Abweichungen 16 Cent addiert worden, damit die Abweichung für den Kammerton A als Bezugston auf Null kommt.

Ton	C	D	E	F	G	A	H	C
Abweichung in Cent	0	+4	-14	-2	+2	-16	-12	0
Abweichung bzgl. A	16	20	2	14	16	0	4	16

Tabelle 8: Abweichungen der reinen Stimmung von der gleichstufigen Dur-Tonleiter (Beispiel C-Dur)

Die Abweichungen, die sich aus dem Quintenzirkel für die **pythagoreische Stimmung** ergeben, enthält Tabelle 9. In der zweiten Zeile steht die Stufe, auf der der Ton im Quintenzirkel (QZ) zu finden ist. Die Abweichungen sind dann immer Vielfache des Unterschieds der Quinte in gleichstufiger und reiner Stimmung (702 Cent – 700 Cent = 2 Cent). Diese ergeben bei 12 Quinten im Zirkel gerade das pythagoreische Komma von $12 \cdot 2\,Cent = 24\,Cent$ (gerundet!).

Oktave	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H
Stufe im QZ	0	-5	+2	-3	+4	-1	+6 -6	+1	-4	+3	-2	+5
Abweichung in Cent	0	-10	-4	-6	8	-2	+12 (-12)	2	-8	6	-4	10
Abweichung bzgl. A	-6	-16	-10	-12	2	-8	6	-4	-14	0	-10	4

Tabelle 9: Abweichungen in der pythagoreischen Stimmung (in Cent)

Bei Fis bzw. Ges treffen beide Enden des Zirkels mit der Differenz von $(12-(-12))Cent=24Cent$ aufeinander und ergeben das pythagoreische Komma (gerundet!). Der Ton wird auf Cis festgelegt. Die Quinte Ges – Des ist deshalb um das pythagoreische Komma zu klein (Wolfsquinte).

Die **mitteltönige Stimmung** wird am Beispiel der Viertel-syntonisches-Komma-mitteltönigen Temperatur in Tabelle 10 dargestellt. Das syntonische Komma von 81/80 entspricht 21,51 Cent. Hier wird anstatt der Viertel Cent grob auf ganze Cent gerundet mit 5 + 6 + 5 + 6 = 22 Cent gerechnet. Die Quinten werden im Wechsel um 5 bzw. 6 Cent vermindert. Neben der Korrektur ist zu berücksichtigen, dass die reine Quinte 2 Cent größer ist als die gleichstufige Quinte. Von C als Bezugston ausgehend werden die Korrekturen im Quintenzirkel aufwärts bis Gis addiert und abwäts bis Es subtrahiert. Die Wolfsquinte liegt dann zwischen Gis und Es.

Ton	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H
Stufe im QZ	0	7	2	-3	4	-1	6	1	8	3	-2	5
Korrektur		-5	-6	-5	-6	-5	-6	-5	-6	-5	-6	-5
Berechnung Abweichung in Cent	0	-21 +2 -5 -24	-3 +2 -6 -7	+7 -2 +5 +10	-10 +2 -6 -14	0 -2 +5 +3	-17 +2 -6 -21	0 +2 -5 -3	-24 +2 -6 -28	-7 +2 -5 -10	+3 -2 +6 +7	-14 +2 -5 -17
Abweichung bzgl. A	10	-14	3	20	-4	13	-11	7	18	0	17	-7

Tabelle 10: Ableitung der Viertel-syntonisches-Komma-mitteltönige Temperatur aus dem Zirkel reiner Quinten

Für die **wohltemperierte Stimmung** werden die Temperaturen Werckmeister III und V vorgestellt. Das pythagoreische Komma von 24 Cent (gerundet!) wird geviertelt. Das sind dann 6 Cent.

Temperatur Werckmeister III

Es werden nun jeweils 6 Cent bei den Quinten zu G, D, A und Fis abgezogen. Alle weiteren Quinten werden mit Abweichungen von 2 Cent berücksichtigt. Da sich ja jetzt der Quintenzirkel (QZ) schließt, ist die Rechnung in zwei Richtungen nicht mehr erforderlich.

Ton	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H
Stufe im QZ	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
W.III-Korrektur			-6				-6	-6		-6		
Berechnung Abweichung in Cent	0 -2 +2 0	-12 +2 -10	-4 +2 -6 -8	-8 +2 -6	-12 +2 -10	-4 +2 -2	-8 +2 -6 -12	0 +2 -6 -4	-10 +2 -8	-8 +2 -6 -12	-6 +2 -4	-10 +2 -8
Abweichung bzgl. A	12	2	4	6	2	10	0	8	4	0	8	4

Tabelle 11: Ableitung der Stimmung Werckmeister III aus dem Zirkel reiner Quinten

Temperatur Werckmeister V
Es werden fünfmal 6 Cent von den Quinten zu A, E, Cis, Gis und Ais abgezogen, während einmal 6 Cent zu der Quinte zu Dis addiert werden. Alle weiteren Quinten werden mit Abweichungen von 2 Cent berücksichtigt.

Ton	C	Cis Des	D	Dis Es	E	F	Fis Ges	G	Gis As	A	Ais B	H
Stufe im QZ	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
W.III-Korrektur		-6		+6	-6				-6	-6	-6	
Berechnung	0 -2 +2 0	0 +2 -6 -4	2 +2 4	-8 +2 +6 0	0 +2 -6 -4	-4 +2 -2	-2 +2 0	0 +2 2	-4 +2 -6 -8	4 +2 -6 0	0 +2 -6 -4	-4 +2 -2
Abweichung in Cent	0	-4	4	0	-4	-2	0	2	-8	0	-4	-2

Tabelle 12: Ableitung der Stimmung Werckmeister V aus dem Zirkel reiner Quinten

Damit soll die Übersicht über Stimmungen und Temperaturen abgeschlossen werden. Das Handwerkszeug für eigene Berechnungen weiterer Temperaturen steht nun zur Verfügung. Der Umgang damit erfordert allerdings doch einiges an Übung und Ausdauer. Zur weiteren Information können die unten genannten Quellen herangezogen werden. Sie dienten auch bei der Zusammenstellung dieses Artikels als Grundlage.

Für Hinweise zu Korrekturen und Ergänzungen in diesem Artikel bin ich dankbar (siehe http://bluemich.net/drehorgel).

Quellen:
Abb. 1: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4f/Moodswingerscale.jpg (ergänzt)
Abb. 2: http://www.ds-dan.de/images/product_images/info_images/595_0.jpg (verändert)
Weitere Informationen:
1. http://de.wikipedia.org/wiki/Reine_Stimmung
2. http://de.wikipedia.org/wiki/Gleichstufige_Stimmung
3. http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreische_Stimmung
4. http://de.wikipedia.org/wiki/Mitteltöne%C3%B6nige_Stimmung
5. http://de.wikipedia.org/wiki/Werckmeister-Stimmung
6. http://de.wikipedia.org/wiki/Cent_(Musik)
7. http://www.lehrklaenge.de (sehr informativ !!!) von Markus Gorski
8. http://www.orgel-info.de/tempe-te.htm (Stimmungstabellen) von Reiner Janke, Freiburg